Ενότητα 4. Επίλυση μαθηματικών προβλημάτων με το BYOB

α. Υπολογισμός δύναμης ακεραίων

Σε προηγούμενη ενότητα, είδαμε ότι το BYOB δεν γνωρίζει την πράξη της ύψωσης σε δύναμη μεταξύ ακεραίων αριθμών. Μπορούμε όμως εύκολα να του διδάξουμε αυτή την πράξη, αφού όπως ξέρουμε από τα μαθηματικά, δεν είναι τίποτε άλλο από διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς. Συγκεκριμένα:

$$\alpha^{\beta} = \underbrace{\alpha * \alpha * \ldots * \alpha}_{\beta \text{ φορές}}$$

Έστω “bash” και “ekthetis” οι μεταβλητές που παριστάνουν τη βάση και τον εκθέτη της δύναμης. Έστω επίσης “dynamh” η μεταβλητή στην οποία θα αποθηκευθεί το τελικό αποτέλεσμα(δηλ dynamh = bash ^{ethetis}).

Παρατηρούμε ότι η μεταβλητή dynamh παίρνει τιμές ως εξής:

- Ξεκινά από την αρχική τιμή 1
- Σε κάθε επανάληψη, αυξάνεται πολλαπλασιαζόμενη με τη μεταβλητή bash

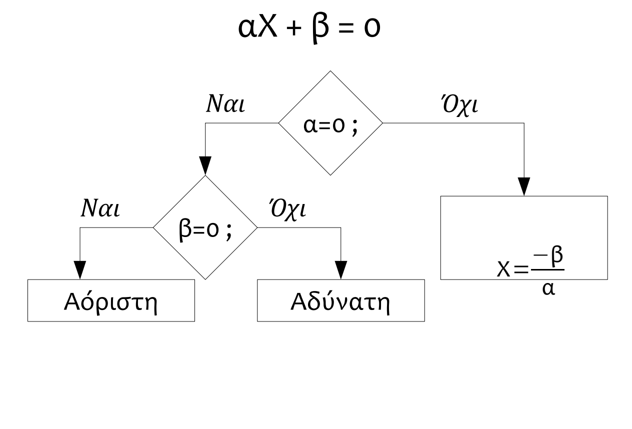
Ουσιαστικά η μεταβλητή dynamh, είναι μια παραλλαγή **αθροιστή**, που <u>πολλαπλασιάζει αντί να αθροίζει ένα σύνολο τιμών</u>. Η αρχική τιμή της είναι το 1(ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού) και αυξάνεται μέσω της `“όρισε dynamh στο (dynamh * bash)”`. Η χρήση της εντολής `“άλλαξε ..”` που χρησιμοποιείται στους αθροιστές δεν είναι δυνατή, διότι κάνει πρόσθεση.

Ο κώδικας του προγράμματος έχει ως εξής:

```
----->Αρχικά διαβάζουμε τις μεταβλητές εισόδου <------
ρώτησε “Βαση =;” και περίμενε
όρισε bash στο [απάντηση]
ρώτησε “Εκθέτης=;” και περίμενε
όρισε ekthetis στο απάντηση
----->Υπολόγισε τη dynamh <-----
όρισε dynamh στο 1
επανάλαβε ekthetis
όρισε dynamh στο (dynamh * bash)
τέλος επανάληψης
πες (ένωσε “Δύναμη=” [dynamh])
```

β. Λύση πρωτοβάθμιας εξίσωσης “αX+β=0”

Η επίλυση της πρωτοβάθμιας εξίσωσης, είναι ήδη γνωστή από τα μαθηματικά της Β' γυμνασίου. Ο αλγόριθμος, διαγραμματικά, φαίνεται αριστερά στην εικόνα, ενώ δεξιά βλέπουμε το αντίστοιχο πρόγραμμα.

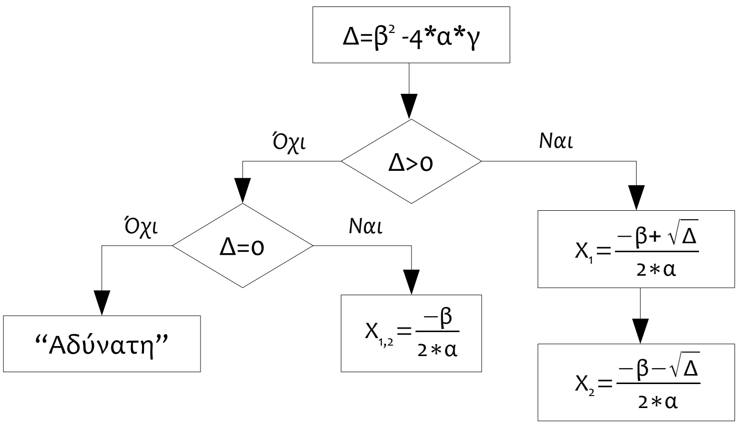



```
Ρώτησε “Πόσο είναι το α;” και περίμενε
Όρισε α στο [απάντηση]
Ρώτησε “Πόσο είναι το β;” και περίμενε
Όρισε β στο [απάντηση]
Εάν (α=0)
      Εάν (β=0)
       Πες “Η εξίσωση είναι αόριστη”
      αλλιώς
       Πες “Η εξίσωση είναι αδύνατη”
      τέλος εάν
αλλιώς
      Πες ( ένωσε “Η εξίσωση έχει λύση X=” [-1*(β/α)])
τέλος εάν
```

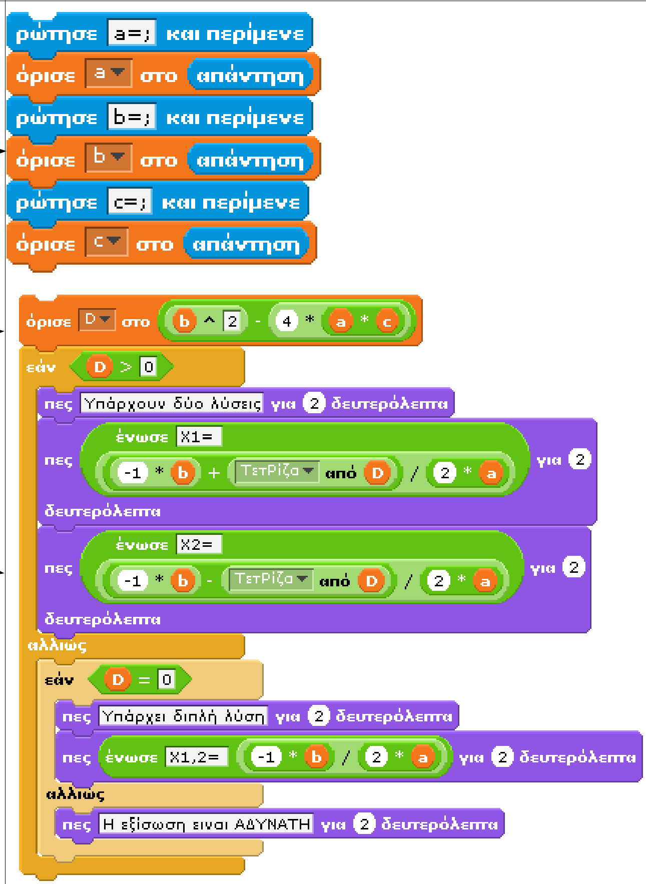
Εμφωλευμένη „εάν“

γ. Λύση δευτεροβάθμιας εξίσωσης της μορφής “$\alpha X^2 + \beta X + \gamma = 0$”

Το διάγραμμα ροής της επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης, όπως το γνωρίσατε στα μαθηματικά έχει ως εξής:



Η δημιουργία του αλγόριθμου, είναι άμεση υλοποίηση του παραπάνω διαγράμματος. Θα χρειαστούμε τέσσερις μεταβλητές: *a*, *b*, *c* που παριστάνουν τους συντελεστές της εξίσωσης και την *D* που παριστάνει τη “διακρίνουσα”. Έτσι έχουμε:

Στο χαρτί	*Στο BYOB*
---->Διάβασε τους συντελεστές της εξίσωσης <------ `Ρώτησε "α=;" και περίμενε` `Όρισε α στο απάντηση` `Ρώτησε "β=;" και περίμενε` `Όρισε β στο απάντηση` `Ρώτησε "γ=;" και περίμενε` `Όρισε γ στο απάντηση` *---->Υπολόγισε τη διακρίνουσα <------* `Όρισε Δ στο (β*β) – (4*α*γ)` *---->Λύσε την εξίσωση <------* `Εάν Δ>0` ` Πες "Υπάρχουν δύο λύσεις"` ` Πες (ένωσε "X1=" (-β + ΤετΡιζα(Δ))/(2*α))` ` Πες (ένωσε "X2=" (-β – ΤετΡιζα(Δ))/(2*α))` `αλλιώς` `  Εάν Δ=0` `       Πες "Υπάρχει διπλή λύση"` `       Πες (ένωσε "X1,2=" (-β)/(2*α) )` `  αλλιώς` `       Πες "Η εξίσωση είναι ΑΔΥΝΑΤΗ"` `  τέλος εάν` `τέλος εάν`	

δ. Υπολογισμός "Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλάσιου" δύο ακεραίων

Έστω "α" και "β" οι δύο αριθμοί. Η μαθηματική μέθοδος εύρεσης του Ε.Κ.Π απαιτεί την ανάλυση των "α" και "β" σε γινόμενα πρώτων όρων. Ο αλγόριθμος που διαπιστώνει "αν ένας αριθμός είναι πρώτος"(δηλ. αν διαιρείται μόνο με τον εαυτό του και τη μονάδα), απαιτεί αρκετούς υπολογισμούς. Έτσι η μαθηματική προσέγγιση του προβλήματος, είναι δύσκολο να εφαρμοστεί στην πράξη.

Αντί γι' αυτήν, θα χρησιμοποιήσουμε μια άλλη μέθοδο. Συγκεκριμένα:

Αν α ο μεγαλύτερος των αριθμών, τότε το ΕΚΠ, είναι το μικρότερο πολλαπλάσιο του α που διαιρείται ακριβώς με το β. Το αντίστροφο ισχύει αν το β είναι ο μεγαλύτερος αριθμός.

Προγραμματιστικά:

Έστω "*ΕΚΠ*", η μεταβλητή του ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου.
Αν α>β
  Όρισε την ΕΚΠ στο α
  Αύξησε την ΕΚΠ κατά α, μέχρι η ΕΚΠ να διαιρείται ακριβώς με β(δηλ ΕΚΠ mod β = 0)
αλλιώς
  Όρισε την ΕΚΠ στο β
  Αύξησε την ΕΚΠ κατά β, μέχρι η ΕΚΠ να διαιρείται ακριβώς με α(δηλ ΕΚΠ mod α = 0)

Το πρόγραμμα έχει ως εξής:

Στο χαρτί	*Στο BYOB*
---->Διάβασε τους δύο αριθμούς <------ Ρώτησε “α=;” και περίμενε Όρισε α στο απάντηση Ρώτησε “β=;” και περίμενε Όρισε β στο απάντηση *---->Υπολόγισε ΕΚΠ αν “α” ο μεγαλύτερος <------* εάν α>β όρισε ΕΚΠ στο [α] επανάλαβε ώσπου ([ΕΚΠ mod β]=0) άλλαξε ΕΚΠ κατά [α] τέλος επανάληψης *---->Υπολόγισε ΕΚΠ αν “β” ο μεγαλύτερος <------* αλλιώς όρισε ΕΚΠ στο [β] επανάλαβε ώσπου ([ΕΚΠ mod α]=0) άλλαξε ΕΚΠ κατά [β] τέλος επανάληψης τέλος εαν *---->Εμφάνισε το τελικό αποτέλεσμα<------* πες (ένωσε “ΕΚΠ=” [ΕΚΠ])	

ε. Υπολογισμός "Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη" δύο ακεραίων

Για τον υπολογισμό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τον "***Αλγόριθμο του Ευκλείδη***".

Έστω "α" και "β" οι ακέραιοι αριθμοί των οποίων αναζητούμε τον Μ.Κ.Δ. Έστω επίσης ότι "max" και "min", μεταβλητές που παριστάνουν τον μεγαλύτερο και το μικρότερο από αυτούς, αντίστοιχα. Σύμφωνα με τον Ευκλείδη, για κάθε ζευγάρι ακεραίων αριθμών ισχύει η σχέση:

$$max = min * \Pi + Y$$

όπου "Π" και "Υ", το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης μεταξύ των αριθμών. Ο αλγόριθμος του Ευκλείδη, μας λέει ότι ο ΜΚΔ των αριθμών max και min, είναι επίσης ΜΚΔ και του υπολοίπου της διαίρεσής τους(Υ). Αν ο min διαιρεί ακριβώς τον max(δηλ. Υ=0), τότε ΜΚΔ=min. Ειδάλλως επαναλαμβάνουμε την έρευνά μας στο ζευγάρι αριθμών min και Υ,(δηλ βάζουμε στη θέση του max τον min, στην θέση του min το Υ και με βάση αυτές τις τιμές, υπολογίζουμε εκ' νέου το Υ της σχέσης max = min * Π + Υ). Ο αλγόριθμος επαναλαμβάνεται μέχρι να έχουμε Υ=0, οπότε ΜΚΔ=min.

<table>
<tr><th>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</th><th>Στο χαρτί</th><th>Στο BYOB</th></tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>α</td><td>β</td><td></td></tr>
<tr><td>18</td><td>30</td><td></td></tr>
<tr><td>max</td><td>min</td><td>Y</td></tr>
<tr><td>30</td><td>18</td><td>12</td></tr>
<tr><td>18</td><td>12</td><td>6</td></tr>
<tr><td>12</td><td>6</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td><u>ΜΚΔ</u></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>
---> Διάβασε τους αριθμούς α και β<--
ρώτησε "α=;" και περίμενε
όρισε α στο [απάντηση]
ρώτησε "β=;" και περίμενε
όρισε β στο [απάντηση]

---> Βρες το μεγαλύτερο και μικρότερο των α και β<--
εάν α>β
όρισε max στο [α]
όρισε min στο [β]
αλλιώς
όρισε max στο [β]
όρισε min στο [α]
τέλος εάν

----------> Υπολόγισε τον ΜΚΔ<--------------
όρισε Υ στο [max MOD min]
επανάλαβε ώσπου (Υ = 0)
όρισε max στο min
όρισε min στο Υ
όρισε Υ στο [max MOD min]
τέλος επανάληψης
όρισε ΜΚΔ στο [min]

----> Ανακοίνωσε το αποτέλεσμα<------
πες (ένωσε "ΜΚΔ=" [ΜΚΔ])
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

στ. Υπολογισμός “μεγίστου” και “ελαχίστου” ενός συνόλου αριθμών

Μπορούμε να βρούμε το μεγαλύτερο και το μικρότερο ενός συνόλου αριθμών, γνωρίζοντας μόνον τον τελευταίο από τους αριθμούς αυτούς. Η μέθοδος χρησιμοποιείται για την καταγραφή των ρεκόρ στα διάφορα αθλήματα.

Το ρεκόρ ενός αθλήματος, είναι η μεγαλύτερη επίδοση σε αυτό. Κάθε φορά που η επίδοση ενός αθλητή ξεπερνάει το ρεκόρ εκείνης της στιγμής, τότε η επίδοση αυτή θεωρείται “νέο ρεκόρ”. Αν η επίδοση του αθλητή είναι μικρότερη, τότε το ρεκόρ δεν αλλάζει. Δηλαδή για τον υπολογισμό του ρεκόρ, χρειάζεται να ξέρουμε <u>μόνο το τρέχων ρεκόρ και την τελευταία επίδοση ενός αθλητή.</u> Αντίστοιχα ενεργούμε για την εύρεση του ελαχίστου, μόνο που καταγράφουμε την μικρότερη τιμή.

Έστω *“arihtmos”* η μεταβλητή που παριστάνει τον τελευταίο αριθμό που διαβάστηκε, και *“max”* και *“min”* η μεγαλύτερη και μικρότερη τιμή αντίστοιχα. Ο αλγόριθμος για ένα σύνολο 10 αριθμών, έχει ως εξής:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

αριθμός	**max**	**min**
5	5	5
13	13	5
27	27	5
6	27	5
8	27	5
2	27	2
45	45	2
9	45	2
17	45	2
11	**45**	**2**

Στο χαρτί

--> Διάβασε τον πρώτο αριθμό.
Ο πρώτος αριθμός, αποτελεί την αρχική τιμή του μεγίστου και ελαχίστου
<------------------------------------

```
ρώτησε “Αριθμός=;” και περίμενε
όρισε arithmos στο [απάντηση]
όρισε max στο [arithmos]
όρισε min στο [arithmos]
```

-

-> Επανάλαβε για τους υπόλοιπους εννέα αριθμούς <-

```
επανάλαβε 9
```

--> Διάβασε τον επόμενο αριθμό <--

```
ρώτησε “Αριθμός=;” και περίμενε
όρισε arithmos στο [απάντηση]
```

-> Έλεγξε αν ξεπερνάει το μεγαλύτερο<-

```
εάν arithmos > max
όρισε max στο [arithmos]
τέλος εάν
```

-> Έλεγξε αν υστερεί του μικρότερου<-

```
εάν arithmos < min
όρισε min στο [arithmos]
τέλος εάν
τέλος επανάληψης
```

-> Εμφάνισε τα αποτελέσματα<-

```
πες (ένωσε “Μέγιστος=” max)
πες (ένωσε “Ελάχιστος= min)
```

Στο BYOB